Akustik (AKU)

Themengebiet: Mechanik

1 Literatur

- L. Bergmann, C. Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1,* de Gruyter
- D. Meschede, *Gerthsen Physik*, Springer

2 Grundlagen

2.1 Wellen in elastisch deformierbaren Medien

Betrachtet man ein elastisches Medium bei dem ein Massenelement aus seiner Gleichgewichtslage verschoben wird, so erfährt dieses eine in die Ruhelage zurücktreibende Kraft. Die Ursache dafür sind in Festkörpern die Bindungskräfte zwischen den Atomen, in Flüssigkeiten und Gasen eine Druckänderung, die durch die Verschiebung entsteht. Durch diese rücktreibende Kraft kommt es zu einer Schwingung des Massenelements um seine Gleichgewichtslage. Allerdings kann man das Massenelement nicht isoliert betrachteten. Es kommt genauso zu einer Kraftwirkung auf benachbarte Massenelemente, und die Schwingung breitet sich so als Welle im Medium aus. Hierbei unterscheidet man zwei Arten von Wellen (s. Abbildung 1):

Transversalwellen: Die Schwingungsrichtung ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung

Longitudinalwellen: Die Schwingungsrichtung ist parallel zur Ausbreitungsrichtung

In Gasen und Flüssigkeiten treten nur longitudinale Schallwellen auf, in Festkörpern können sich durch Scherkräfte auch transversale akustische Wellen bilden.

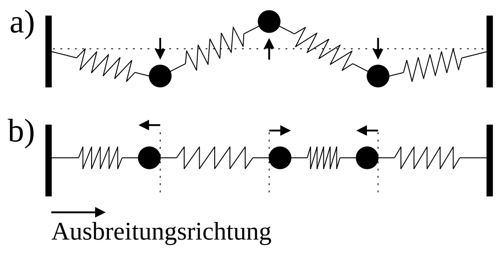

Abbildung 1: Transversale (a) und longitudinale (b) Schwingungen

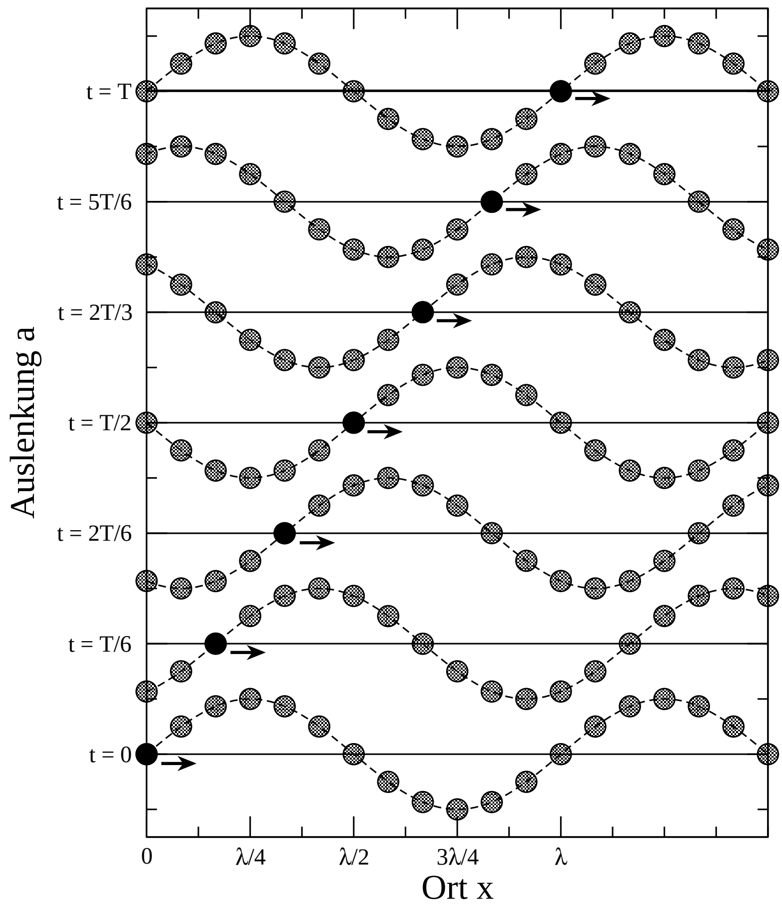

Abbildung 2: Ausbreitung einer Welle im elastischen Medium

2.2 Charakteristische Größen

Betrachtet man eine harmonische Welle, so sieht man, dass an jedem Ort x die Auslenkung a nach einer Schwingungsdauer T wieder dieselbe ist, wie zum Zeitpunkt $t = 0$. Räumlich betrachtet hat sich die Welle in der Zeit $t = T$ genau um eine Wellenlänge λ verschoben. (s. Abbildung 2).

Mathematisch lässt sich dieses Verhalten über die Gleichung

$$a(t,x) = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi\right) \tag{1}$$

beschreiben. Dabei ist A die Schwingungsamplitude, $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz, $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl und φ die Phase.

Aus der Verschiebung der Welle um eine Wellenlänge pro Schwingungsperiode lässt sich die Geschwindigkeit bestimmen, mit der sich der Schwingungszustand (die Phase) der Welle im Medium ausbreitet. Diese Phasengeschwindigkeit ist gegeben durch

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda \tag{2}$$

wobei man mit $f = \frac{1}{T}$ die Frequenz der Schwingung bezeichnet.[1]

[1] Die Einheit der Frequenz ist 1 Hz $= \frac{1}{\mathrm{s}}$. Sie sollte nur für Frequenzen verwendet werden. Bei anderen Größen, wie z.B. der Kreisfrequenz oder bei Dämpfungskonstanten schreibt man $\frac{1}{\mathrm{s}}$.

2.3 Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von Materialgrößen

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen in elastischen Medien hängt von der Dichte ρ des Mediums und der Kopplung zwischen den Atomen des Mediums ab.

Festkörper

Im Festkörper treten sowohl longitudinale als auch transversale akustische Wellen auf, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit vom Elastizitätsmodul E und vom Schubmodul G abhängen. Für lange Stäbe gilt, wenn der Durchmesser deutlich kleiner als die Schallwellenlänge ist, die Näherung:

$$v_{\mathrm{FK,longitudinal}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \text{und} \qquad v_{\mathrm{FK,transversal}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{3}$$

Flüssigkeiten und Gase

In Flüssigkeiten und Gasen tritt anstelle des Elastizitätsmoduls E das Kompressionsmodul K. Das für transversale Wellen notwendige Schubmodul verschwindet. Die resultierende Phasengeschwindigkeit für longitudinale Schallwellen ist dann

$$v_{\mathrm{Fl,Gas}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{4}$$

wobei das Kompressionsmodul durch die relative Änderung des Volumens V bei einer Druckänderung gegeben ist

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right) \tag{5}$$

Bei idealen Gasen gilt für adiabatische Zustandsänderungen der Zusammenhang zwischen Druck und Volumen

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{konst.} \qquad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_V}, \tag{6}$$

wobei der Adiabatenkoeffizient κ der Quotient der spezifischen Wärmekapazitäten des Gases bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen ist.
Mit dem Ansatz (6) und Gleichung (4) und (5), erhält man für die Schallgeschwindigkeit in einem idealen Gas

$$v_{\mathrm{Gas}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} \tag{7}$$

wobei die letzte Umformung über die ideale Gasgleichung mit der Gaskonstante R, der Temperatur T und der molaren Masse M des Gases erfolgte. Die Schallgeschwindigkeit in idealen Gasen hängt nach Gleichung (7) also von der Wurzel der absoluten Temperatur ab

$$v_{\mathrm{Gas}}(T) = v_{\mathrm{Gas}}(T_0) \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}} \tag{8}$$

2.4 Stehende Wellen

Betrachtet man zwei im Medium gegeneinander laufende Wellen mit gleicher Kreisfrequenz ω, gleicher Amplitude A und einer beliebigen (aber festen) Phase φ

$$a_1(x,t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \tag{9}$$

$$a_2(x,t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi) \tag{10}$$

so erhält man als Resultat eine *stehende Welle*

$$\begin{aligned} a(x,t) &= a_1(x,t) + a_2(x,t) \\ &= 2 \cdot A \cdot \underbrace{\cos\left(\omega \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{Zeitabhängigkeit}} \cdot \underbrace{\cos\left(k \cdot x + \frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{Ortsabhängigkeit}} \end{aligned} \tag{11}$$

An den Orten, an denen der zweite cos-Term verschwindet, entstehen Schwingungsknoten, hier ist die Amplitude immer Null. An den Orten, an denen die Amplitude Maximal ist, der zweite cos-Term also ± 1 ist, entstehen Schwingungsbäuche.

Die Bewegung beiderseits der Knoten ist entweder auf die Knoten zu oder von ihnen weg gerichtet. Die dadurch erzeugte Druckänderung ist gerade an den Auslenkungsknoten am stärksten. Die Druckwelle ist gegen die Auslenkungswelle gerade um $\frac{\lambda}{4}$ verschoben.

Eine stehende Welle lässt sich z.B. durch Überlagerung einer einfallenden Welle mit einer reflektierten Welle erreichen. Bei der Reflexion an einer Wand oder an einem geschlossenen Rohrende tritt ein Phasensprung von π auf. Einlaufende und reflektierte Welle schwingen hier gegenphasig, es liegt also immer ein Schwingungsknoten vor. Bei der Reflexion an einem offenen Rohrende tritt kein Phasensprung auf, es liegt ein Schwingungsbauch vor. Betrachtet man nun eine Welle in einem Rohr, so wird diese beim Erreichen des Endes reflektiert. Die rücklaufende Welle wird ihrerseits am Anfang des Rohres reflektiert. Eine stehende Welle kann sich nun aber nur ausbilden, wenn die zweifach reflektierte Welle mit der ursprünglich einfallenden identisch ist. Für ein beidseitig geschlossenes oder beidseitig offenes Rohr führt dies zu einem Zusammenhang zwischen der Länge l des Rohrs und möglichen Wellenlängen bzw. Frequenzen der Schwingungen

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad \text{und} \qquad f = n \cdot \frac{v}{2l} \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{12}$$

Für ein einseitig geschlossenes Rohr gilt die Bedingung

$$l = (2n-1) \cdot \frac{\lambda}{4} \qquad \text{und} \qquad f = \frac{(2n-1) \cdot v}{4l} \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

In Abbildung 3 sind die ersten drei Schwingungsmoden für alle drei Fälle skizziert. Am offenen Ende eines realen Rohrs reicht die stehende Welle etwas in den Außenraum hinein. Die effektive Länge l ist dann etwas größer als die Länge l_{Rohr} des Rohrs.

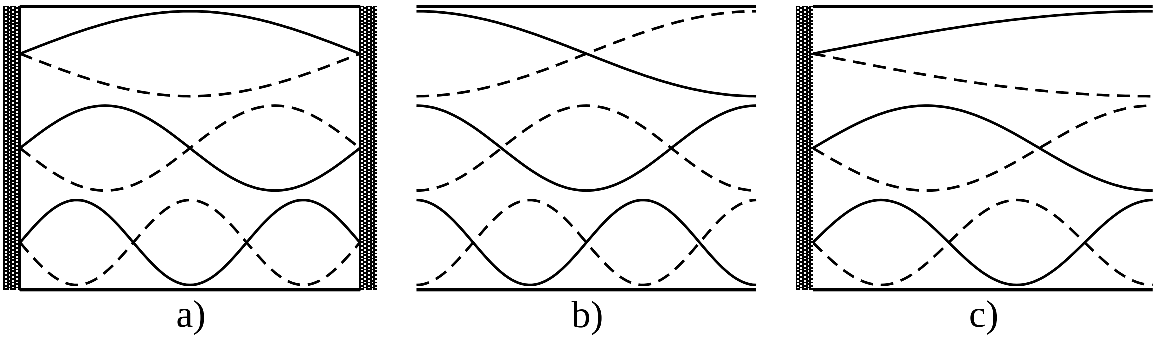

Abbildung 3: Grundschwingung (oben) und die ersten beiden Oberschwingungen einer Luftsäule in einem Rohr, das a) beidseitig geschlossen, b) beidseitig offen und c) einseitig geschlossen ist

3 Versuchsaufbau

3.1 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit durch Laufzeitmessung

Um die Schallgeschwindigkeit direkt zu bestimmen misst man die Zeit, die ein kurzer Schallimpuls benötigt um eine bekannte Strecke zu überwinde. In Gasen kann man dies durch zwei Mikrofone realisieren, die auf einer Achse platziert werden. Ein solcher Aufbau ist in Abbildung 4 zu sehen. Lässt sich eine Änderung des Mikrofonabstandes genauer bestimmen als der exakte Abstand der Mikrofonkapseln, so lässt sich die Schallgeschwindigkeit über die Änderung der Laufzeit bei einer Änderung des Abstandes errechnen.

Will man die Schallgeschwindigkeit in einem Festkörper bestimmen, so kann man an einem Ende einen Schallsensor befestigen (vgl. Abbildung 5). Erzeugt man nun am anderen Ende einen Schallimpuls, so erzeugt dieser am Sensor ein Signal. Der Schallimpuls wird nun zweimal, am jeweiligen Stabende, reflektiert und erzeugt erneut ein Signal am Sensor. Aus der Zeitdifferenz und der doppelten Stablänge lässt sich die Schallgeschwindigkeit ermitteln.

Festkörper können sowohl mit longitudinal als auch mit transversal Wellen angeregt werden. Für beide Modi misst man unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Zu beachten ist weiterhin, dass durch Einschränkung der Ausbreitungsdimensionen, z.B. in Stäben, nochmals eine andere Geschwindigkeit beobachtet wird.

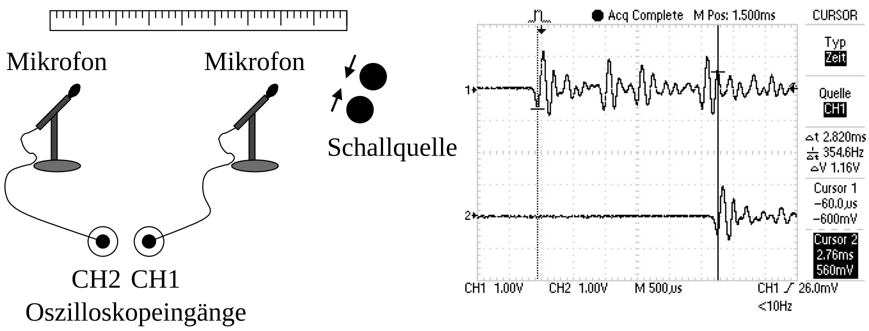

Abbildung 4: Aufbau zur direkten Messung der Schallgeschwindigkeit in Gasen. Rechts ist ein typisches Bild am Oszilloskop dargestellt.

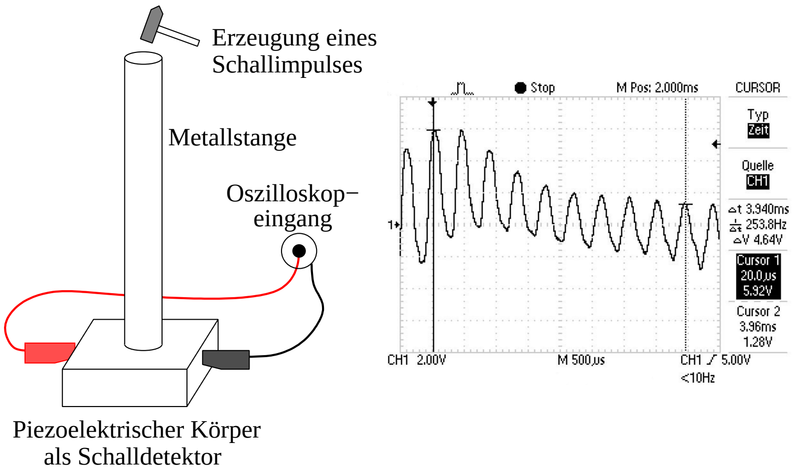

Abbildung 5: Aufbau zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Festkörpern. Rechts ist ein typisches Bild am Oszilloskop dargestellt.

3.2 Bestimmung über stehende Wellen

In einem Rohr wird die Luftsäule mit einer festen Frequenz angeregt (vgl. Abbildung 6). Bei bestimmten Rohrlängen lassen sich Resonanzen beobachten. Für die Resonanzbedingung beachten Sie die Gleichungen (12) und (13). Über die Länge des Rohres und die Anregungsfrequenz kann die Schallgeschwindigkeit ermittelt werden.

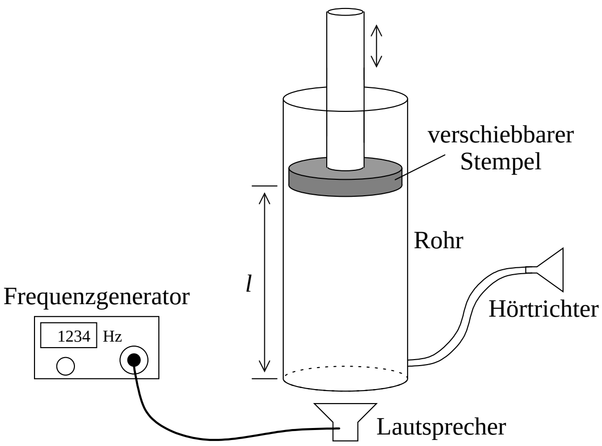

Abbildung 6: Aufbau zur Erzeugung stehender Wellen in einem Rohr

4 Durchführung

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie für ***drei*** *Stäbe, unterschiedlicher Materialien, die Schallgeschwindigkeit und daraus das Elastizitätsmodul E der Materialien.*

Stellen Sie hierfür den Stab auf den piezoelektrischen Kristall. Verbinden Sie die Anschlüsse des Kristalls mit dem CH-1 des Oszilloskops.

Um den Schallimpuls zu starten schlagen Sie **vorsichtig** auf das obere Ende des Stabendes. Justieren Sie das Bild am Oszilloskop um ein auswertbares Bild zu bekommen. Für Fragen steht hier der Versuchsbetreuer zur Verfügung. Überlegen Sie sich, welche Unsicherheiten bei der Messung zu berücksichtigen sind.

Tipps zum Oszilloskop:

- Achseneinstellung: Zeit x-Achse, Amplitude CH-1 y-Achse
- Triggermode: Normal
- Stopp-Taste bei gutem Signal drücken
- Cursor verwenden zur Zeitmessung
- Messdaten können mit USB-Stick gespeichert werden

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie mit Hilfe der beiden Mikrofone die Schallgeschwindigkeit in der Luft.

Verbinden Sie die beiden Mikrofone mit den Kanälen des Oszilloskops, damit Sie beide Signale sehen können. Justieren Sie das Oszilloskop und stellen Sie die Option *Single Seq.* ein. Nachdem die Mikrofone befestigt sind, schlagen Sie zwei Metallkugeln zusammen. Achten Sie darauf, dass der von Ihnen erzeugt Schallimpuls möglichst auf der Achse der beiden Mikrofone ist. Der Schall erreicht das zweite Mikrofon später. Diese Zeitverzögerung kann nun verwendet werden um mit dem Abstand der Mikrofone die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen.

Es empfielt sich die Schallerzeugung etwa einen Meter vor dem ersten Mikrofon zu machen, damit die Aussteuerung der beiden Mikrofone nicht zu unterschiedlich ist.

Wiederholen Sie die Messung für fünf bis zehn *verschiedene* Abstände der Mikrofone. Bestimmen Sie die Unsicherheiten.

Hinweis: Die Standardbedingungen für Luft sind $\rho_0 = 1,293\ \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$, $T_0 = 0°$ C und $p_0 = 1013$ hPa.

Aufgabe 3:
Messen Sie die Schallgeschwindigkeit der Luft über eine stehende Welle in einem Rohr.

Stellen Sie den Frequenzgenerator auf Sinussignal mit der Frequenz $f_1 \approx 1$ kHz. Verbinden Sie den Frequenzgenerator mit dem Lautsprecher. Verschieben Sie anschließend den Stempel und prüfen Sie, ob Resonanzmaxima zu finden sind. Stellen Sie eine geringe Lautstärke ein. Sie sollten jedoch darauf achten, dass Sie die Minima noch wahrnehmen können. Über das Mikrofon im Rohr lassen sich die Resonanzstellen auch am Oszilloskop sichtbar machen.
Suchen Sie systematisch die Resonanzmaxima und messen sie für jedes Maximum die Rohrlänge l.

Achten Sie darauf ob sie das Maxima mit dem Ohr oder dem Mikrofon bestimmen. Wiederholen Sie die Messung für zwei weitere Frequenzen. f_2 sollte zwischen $500 - 800$ Hz und f_3 zwischen $1500 - 2000$ Hz liegen.

Schalten Sie nach dem Versuch alle Mikrofone aus!

5 Auswertung

Aufgabe 4: Laufzeitmessung im Festkörper

Aus der Länge des Stabes und der Laufzeit des Schallimpulses können Sie die Schallgeschwindigkeit des jeweiligen Festkörpers direkt bestimmen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Literaturwerten und Diskutieren sie eventuelle Abweichungen.

Bestimmen Sie das Elasizitätsmodul E des Festkörpers (Gleichung (3)). Nehmen Sie an, dass nur longitudinale Wellen auftreten.

Erstellen Sie eine ausführliche Fehlerrechnung.

Aufgabe 5: Laufzeitmessung in der Luft

Erstellen sie einen Graphen aus Ihren Messdaten. Tragen Sie die Wegdifferenz gegen die Zeit auf. Achten Sie auf Unsicherheiten. Legen Sie eine Ausgleichsgerade durch Ihre Messpunkte und bestimmen Sie aus der Steigung die Schallgeschwindigkeit.

Überprüfen Sie, ob die Gerade durch den Ursprung geht und Diskutieren Sie Abweichungen.

Berechnen sie den Adiabatenkoeffizienten κ von Luft mit Gleichung (7). Vergleichen Sie Ihre Messergebnisse mit Literaturwerten.

Aufgabe 6: Stehende Welle

Tragen Sie die gemessene Länge l gegen die Ordnung der Resonanzmaxima graphisch auf. Geben Sie die Unsicherheit in der Längenmessung als Fehlerbalken aus und legen Sie eine Ausgleichsgerade durch Ihre Messwerte. Verwenden Sie Gleichung (13) um mit der Geradensteigung und der Frequenz die Schallgeschwindigkeit zu errechnen.

Bestimmen Sie ausführlich für alle drei Ergebnisse die Unsicherheiten und bilden Sie den gewichteten Mittelwert.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem der vorherigen Aufgabe *und* dem theoretischen Literaturwert.

6 Bestimmung der Unsicherheiten

- Die Genauigkeit des Oszilloskops auf der Zeitachse ist typischerweise 0,01% . Der Begrenzende Faktor ist aber die Ablesegenauigkeit bzw. Einstellgenauigkeit des Cursors (Auflösung).
- Die Unsicherheit des Meterstabs (Fertigungsgenauigkeit) ist $a + b \cdot L$ mit $a = 0{,}6$ mm, $b = 0{,}4$ mm/m und L der auf den nächsten vollen Meter aufgerundeten gemessenen Länge.
- Laut Hersteller besitzt die Frequenzmessung des Frequenzgenerators eine Genauigkeit vom ± 1 Digit. Dazu kommen Schwankungen der Frequenz, die zu berücksichtigen sind.
- Tab. 1 zeigt die Unsicherheit in der Dichte.

Wird die Schallgeschwindigkeit graphisch ausgewertet, so enthält die Steigung der Ausgleichsgeraden alle Typ-A-Unsicherheiten. Typ-B-Unsicherheiten müssen getrennt beachtet werden.

Mit der Fehlerfortpflanzung lässt sich die gesamte Unsicherheit der Schallgeschwindigkeit ermitteln.

Sonstige Angaben

Tabelle 1: Dichte von Werkstoffen

Stoff	**Dichte** [$\frac{g}{cm^3}$]
Aluminium	$2,7 \pm 0,1$
Eisen	$7,8 \pm 0,1$
Kupfer	$8,95 \pm 0,05$
Messing	$8,6 \pm 0,2$
Polyvinylchlorid (PVC)	$1,4 \pm 0,2$