Trägheitsmoment (TRM)

Themengebiet: Mechanik

1 Literatur

- W. Kranzer, *So interessant ist Physik*, Köln, 1982, S. 63-65, 331-335
- R. L. Page, *The Physics of Human Movement*, Exeter, 1978, S. 45-56

2 Grundlagen

2.1 Trägheitsmoment, Drehmoment, Drehimpuls

Bei Rotationsbewegungen gibt es Parallelen zu den bereits bekannten Translationsbewegungen. Eine Übersicht bietet Tabelle 1.

Tabelle 1: Gegenüberstellung der sich entsprechenden Größen bei Translation und Rotation

Translation			**Rotation**
Masse	m	J_ω	Trägheitsmoment
Weg	$\vec{s}$	$\vec{\varphi}$	Winkel
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	Winkelbeschleunigung
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\vec{L} = J_\omega \cdot \vec{\omega}$	Drehimpuls
Kraft	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = J_\omega \cdot \vec{\alpha}$	Drehmoment
kinetische Energie	$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	$E = \frac{1}{2} J_\omega \cdot \omega^2$	Rotationsenergie

Das Trägheitsmoment J_ω eines Massepunktes m bezüglich der Rotationsachse ω ist definiert als

$$J_\omega = m \cdot r^2 \tag{1}$$

wobei r der Abstand zur Rotationsachse ist.
Das Trägheitsmoment muss immer im Bezug zur Drehachse angegeben werden. Es ist keine skalare Größe, sondern ein sogenannter Tensor zweiter Stufe - in diesem speziellen fall ist es eine 3x3 Matrix.
Um einen starren Körper in Rotation versetzten zu können ist ein *Drehmoment* $\vec{M}$ nötig. Das Drehmoment wird durch eine Kraft $\vec{F}$ erzeugt, welche senkrecht auf den Hebelarm $\vec{r}$ wirkt

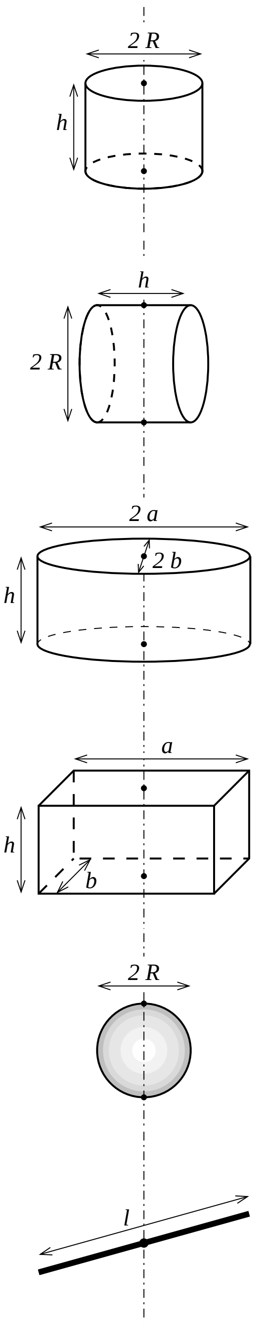
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2}$$

Für den Drehimpuls gilt

$$\vec{L} = J_\omega \cdot \vec{\omega} \tag{3}$$

Für eine Änderung des Drehimpulses ist immer ein Drehmoment nötig. Es gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{4}$$



Zylinder:
Drehachse parallel zur Achse,
Radius R, Höhe h, Masse m
Volumen $= \pi\ R^2\ h$

$$J_{\mathrm{Z}} = \frac{mR^2}{2}$$

Zylinder:
Drehachse senkrecht zur Achse,
Radius R, Höhe h, Masse m
Volumen $= \pi\ R^2\ h$

$$J_{\mathrm{Z}\,\perp} = m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$$

ellipt. Zylinder:
Drehachse parallel zur Achse,
Achsen a und b,
Höhe h, Masse m
Volumen $= \pi\ a\ b\ h$

$$J_{\mathrm{E}} = \frac{m}{4} \cdot \left(a^2 + b^2\right)$$

Quader:
Kantenlängen a und b,
Höhe h, Masse m
Volumen $= a\ b\ h$

$$J_{\mathrm{Q}} = \frac{m}{12} \cdot \left(a^2 + b^2\right)$$

Kugel:
Radius R, Masse m
Volumen $= \frac{4}{3}\ \pi\ R^3$

$$J_{\mathrm{K}} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$$

Stab (lang, dünn):
Länge l, Masse m

$$J_{\mathrm{K}} = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$$

Abbildung 1: Beispiele für Trägheitsmomente einfacher Körper. Die Drehachse geht in der gezeichneten Lage jeweils durch den Schwerpunkt

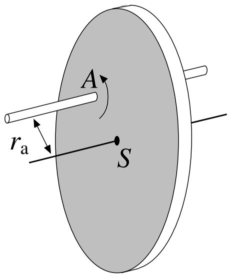


Abbildung 2: Verdeutlichung des Satz von Steiner: Der Körper rotiert um eine Achse durch den Punkt A mit dem Abstand r_a zum Schwerpunks S.

Wie der Impuls ist auch der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße, d.h. in einem geschlossenen System ($\vec{M} = 0$) ist die Summe aller Drehimpulse konstant.

2.2 Berechnung von Trägheitsmomenten

In Gleichung (1) ist das Trägheitsmoment einer Punktmasse definiert. Einen ausgedehnten Körper kann man sich aus vielen Massepunkten m_i in verschiedenen Abständen r_i zusammengesetzt denken. Für sein Trägheitsmoment ergibt sich dann

$$J_\omega = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \tag{5}$$

Für einen Körper mit kontinuierlicher Dichteverteilung ρ erhält man

$$J_\omega = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \cdot \rho \cdot dV \tag{6}$$

Für einfache Körper, z.B. Zylinder oder Kugel, ist die Berechnung von Trägheitsmomenten relativ leicht möglich. Es ist dabei aber zu bedenken, dass das Trägheitsmoment immer von der Drehachse abhängt. In Abbildung 1 sind die Trägheitsmomente einiger einfacher Körper dargestellt.

2.3 Der Satz von Steiner

Verläuft die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Körpers, so greift der Satz von Steiner. Zur Verdeutlichung wird auf Abbildung 2 verwiesen. Das gesuchte Trägheitsmoment J_A kann als Summe zweier Trägheitsmomente dargestellt werden. J_S sei das Trägheitsmoment durch den Schwerpunkt, parallel zur Rotationsachse, m sei die Masse des Körpers und r_a der Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt.

$$J_A = J_S + m \cdot r_a^2 \tag{7}$$

Aus dem Satz von Steiner folgt, dass ein minimales Trägheitsmoment existiert. Dieses minimale Trägheitsmoment ist das Schwerpunktsträgheitsmoment.

2.4 Harmonische Schwingungen

Das Trägheitsmoment spielt auch bei der beschleunigten Drehbewegung eine Rolle. Bei einer translatorischen Schwingung einer Masse m an einer elastischen Feder mit Federkonstante D (auch Federsteife oder Richtgröße) wirkt eine Rückstellkraft $\vec{F}$, die entgegengesetzt proportional der Auslenkung $\vec{s}$ ist.

$$\vec{F} = -D \cdot \vec{s} \tag{8}$$

Für die Schwingungsdauer gilt unabhängig von der Amplitude

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \tag{9}$$

Abweichungen von der Linearität in Gleichung (8) sollen hier nicht betrachtet werden.
Eine harmonische Drehschwingung erhält man zum Beispiel, wenn ein um eine Achse drehbar gelagerter Körper durch eine Spiralfeder in Richtung der Ruhelage beschleunigt wird. Es müssen nun die Masse m durch das Trägheitsmoment J_ω, die Auslenkung s durch den Auslenkwinkel $\vec{\varphi}$ und die Federkonstante D durch die Winkelrichtgröße D^* (auch Drehsteife, Richtmoment oder Direktionsmoment) ersetzt werden. Statt der Kraft $\vec{F}$ wirkt nun das Drehmoment

$$\vec{M} = -D^* \cdot \vec{\varphi} \tag{10}$$

Die Schwingungsdauer ergibt sich zu

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_\omega}{D^*}} \tag{11}$$

Für eine ausführlichere Behandlung der harmonischen Schwingungen sei hier auf den Versuch *Pohlsches Rad*[1] verwiesen.

2.5 Extrapolation von Trägheitsmomenten

Im späteren Verlauf des Versuchs wird das Trägheitsmoment einer Puppe mit dem eines Menschen verglichen. Dies führt zu einem Zusammenhang zwischen ähnlichen Körpern. Um nun das Gesamtträgheitsmoment einen Objektes zu bestimmen kann man die Summe aller einzelnen Trägheitsmoment betrachten

$$J_{Ges} = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \tag{12}$$

Nimmt man nun an, dass die Radien r_{Puppe} und R_{Mensch} genau im Verhältnis der Längen l_{Puppe} und L_{Mensch} stehen, dann erhält man den theoretischen Zusammenhang

$$R_i = r_i \cdot \frac{L}{l} \tag{13}$$

Gleicher Zusammenhang wird für die Massenelemente M_i, m_i und die Gesamtmassen M_{Mensch}, m_{Puppe} angenommen.

$$M_i = m_i \cdot \frac{M_{Mensch}}{m_{Puppe}} \tag{14}$$

Mit den Gleichungen (12) bis (14) erhält man schließlich die Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten von Mensch und Puppe

$$J_{Mensch} = \sum_i M_i \cdot R_i^2 = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \cdot \left(\frac{L}{l}\right)^2 \cdot \frac{M}{m} = \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{L}{l}\right)^2 \cdot J_{Puppe} \tag{15}$$

Setzt man nun für die beiden Körper jeweils eine homogene Dichteverteilung an, so kann man Gleichung (15) weiter vereinfachen

$$J_{Mensch} = \frac{\rho_{Mensch} \cdot L^3}{\rho_{Puppe} \cdot l^3} \cdot \left(\frac{L}{l}\right)^2 \cdot J_{Puppe} = \frac{\rho_{Mensch}}{\rho_{Puppe}} \cdot \left(\frac{L}{l}\right)^5 \cdot J_{Puppe} \tag{16}$$

Bei gleicher Dichte und Form der Körper gehen also Längenverhältnisse mit der fünften Potenz in das Trägheitsmoment ein.

[1] *Pohlsches Rad und Chaos*, Physikalisches Anfängerpraktikum der TUM

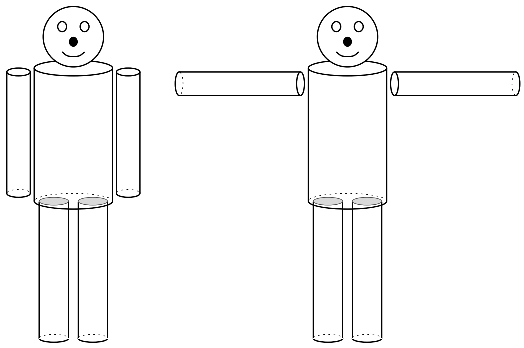


Abbildung 3: Modell des Menschen aus Zylindern und Kugel, für verschiedene Körperhaltungen.

2.6 Modellrechnungen

2.6.1 Der Mensch als Zylinder

Eine sehr grobe Näherung zur Berechnung des Trägheitsmoments eines Menschen besteht darin, ihn als Zylinder anzusehen. Leicht messbar sind Masse m und Körperumfang $U = 2\pi \cdot r$. Für das Trägheitsmoment des Menschen ergibt sich so

$$J_{Zyl} = \frac{m}{8\pi^2} \cdot U^2 \tag{17}$$

2.6.2 Der Mensch als Zusammensetzung aus Zylindern und Kugeln

Eine bessere Näherung besteht darin, den Körper aus verschiedenen einfachen geometrischen Objekten (Zylindern, Kugeln, Quadern, ...) zusammenzusetzen. Dies ist in Abbildung 3 gezeigt.
Um eine gute Übereinstimmung von Modell und Wirklichkeit zu bekommen, ist es notwendig, die durchschnittlichen prozentualen Massenanteile der einzelnen Körperteile zu berücksichtigen. Diese sind in Tabelle 2 aufgelistet.
Man kann nun beim Menschen die einzelnen Größen (Radien und Höhen der Zylinder bzw. Kugel; Abstände von der Drehachse) ausmessen, die jeweiligen Teilträgheitsmomente bezüglich der Drehachse ausrechnen, und schließlich das Gesamtträgheitsmoment ermitteln. Durch Variation der Parameter lässt sich mit diesem Modell eine passable Annäherung des berechneten Trägheitsmoments mit dem gemessenen Gesamtträgheitsmoment erreichen.

Körperteil	**Gewichtsanteil einzeln in %**	
Kopf	7,3	
Rumpf	48,9	
Oberarm	2,7	Arme:
Unterarm	1,7	10,4%
Hand	0,8	
Oberschenkel	9,7	Beine:
Unterschenkel	5,3	33,4%
Fuß	1,7	

Tabelle 2: Prozentuale Anteile der Körperteile zur Gesamtmasse des Menschen

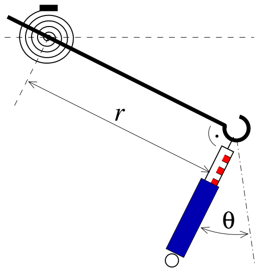


Abbildung 4: Messung der Tangentialkraft zur Bestimmung der Drehmomente.

3 Vorüberlegungen

Um die Messungen nicht unnötig wiederholen zu müssen, beantworten Sie im Praktikum folgende Fragen:

- Zur Bestimmung des Drehmoments wird die Tangentialkraft der Drehscheibe exakt unter 90° gemessen (siehe Abbildung 4). Wie groß darf die Winkelabweichung θ maximal sein, damit der Messfehler unter 1% liegt? Hier ist die Richtung zu beachten.
- Um das Trägheitsmoment der Puppe bzw. des Menschen zu bestimmen, befindet sich der Körper auf der Drehscheibe. Wie weit darf der Schwerpunkt maximal von der Drehachse entfernt sein, um den Fehler kleiner als 10% zu halten? Betrachten Sie als Näherung, die Puppe oder den Menschen als Zylinder.

4 Versuchsdurchführung

Als Messgerät für Trägheitsmomente bietet sich ein System an, das Drehschwingungen ausführt. Dieses muss in einem ersten Schritt kalibriert werden, da zunächst die Winkelrichtgröße D^* und das Trägheitsmoment des Gerätes unbekannt sind. Hierfür benutzt man zwei Methoden:

- Beim statischen Verfahren wird das Drehmoment in Abhängigkeit vom Drehwinkel gemessen (vgl. Abbildung 4).
- Beim dynamischen Verfahren wird eine harmonische Eigenschwingung angeregt und deren Frequenz bestimmt.

4.1 Messung des Trägheitsmoments der Puppe

Als Messsystem wird hier die kleine Drehachse verwendet, auf der die Puppe befestigt werden kann.
Achtung! Die Drehachse darf nicht über 360° ausgelenkt werden !

Aufgabe 1: Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße

Messen Sie in beide Drehrichtungen für jeweils vier Auslenkungen (in 45° Schritten) das rückstellende Drehmoment des Mess-Systems.

Aufgabe 2: Dynamische Bestimmung des Trägheitsmoments

Messen Sie die Schwingungszeit des Mess-Systems mit eingestecktem Hilfsstab, aber ohne Gewichte, für Auslenkungen von etwa 90° und 135°. Messen Sie nun die Schwingungsdauer für Auslenkungen von etwa 90° und 135°, mit einem zusätzlichen Gewichtepaar (Nummer notieren!) in mindestens vier deutlich unterschiedlichen Abständen r von der Achse. Messen Sie die Masse m der Zylindergewichte, sowie deren Höhe und Durchmesser.

Aufgabe 3: Messung der Puppe

Messen Sie die Schwingungszeit für Auslenkungen von etwa 90° und 135° mit aufgesetzter Puppe (aber ohne Gewichte) für mindestens zwei Körperhaltungen. Messen Sie auch Länge, Hüftdurchmesser und Masse der Puppe.

4.2 Messungen des Trägheitsmoments des Menschen

Für diese Messungen wird der große Drehteller verwendet. Notieren Sie sich die Nummer des Aufbaus, den Sie verwenden!

Aufgabe 4: Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße

Messen Sie zwischen 0° und 90° in 10°-Schritten in beide Drehrichtungen das rückstellende Drehmoment des Mess-Systems.

Aufgabe 5: Dynamische Bestimmung des Trägheitsmoments

Messen Sie über möglichst viele Schwingungen des Mess-Systems den Mittelwert der Schwingungsdauer (mit Stoppuhr und Computer).

Aufgabe 6:

Messen Sie die Geometrie des Mess-Systems zur Abschätzung dessen Eigenträgheitsmoments.

Aufgabe 7: Messung des Menschen

Messen Sie über möglichst viele Schwingungen die mittlere Schwingungsdauer des Mess-Systems mit dem Menschen für die beiden Körperhaltungen, die Sie auch bei der Puppe gemessen haben.
Wiederholen Sie die Messungen, so dass für jede Körperhaltung mindestens drei unabhängige Messwerte vorliegen.

Aufgabe 8:

Schätzen Sie die Genauigkeit, mit der der Schwerpunkt des Körpers auf der Drehachse liegt.

Aufgabe 9:

Messen Sie Länge, Hüftumfang und Masse des Menschen, und alle weiteren Abmessungen, die nötig sind, um das Trägheitsmoment nach Abschnitt 2.6.2 berechnen zu können.

5 Auswertung

5.1 Auswertungen der Messungen an der Puppe

Aufgabe 10: Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*

Tragen Sie alle Wertepaare (Kraft-Auslenkwinkel) in ein Diagramm ein und bestimmen Sie die Ausgleichsgerade mit Unsicherheiten. Überprüfen Sie, ob die Gerade innerhalb des Unsicherheitsbereichs durch den Ursprung verläuft. Diskutieren Sie etwaige Abweichungen. Ermitteln Sie D^* unter Verwendung von Gleichung (10) mit Unsicherheit aus der Steigung der Geraden.
Die Unsicherheit der Geradensteigung enthält bereits die Typ-A-Unsicherheiten der Kraft und Winkelmessung. Zusätzlich sind noch die Typ-B-Unsicherheiten und die Unsicherheit der Abstandsmessung zu berücksichtigen.

Aufgabe 11: Dynamische Bestimmung der Winkelrichtgröße und des Eigenträgheitsmoments der Mess-Apparatur

Aus Gleichung (11) erhält man mit dem Eigenträgheitsmoment J_0 des Mess-Systems und einem zusätzlichen Trägheitsmoments J_z

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*} \cdot (J_0 + J_\mathrm{z}) \tag{18}$$

Bestimmen Sie die Trägheitsmomente J_z der Gewichte bei den gemessenen Abständen r. Zeigen Sie, dass die Ausdehnung der Gewichte bei der Berechnung des Gesamtträgheitsmoments keine Rolle spielt.
Tragen Sie das Quadrat der Schwingungsdauer T^2 gegen $2mr^2$ (s. Aufgabe 2) in einem Diagramm auf. Verwenden Sie für die beiden Messreihen unterschiedliche Symbole. Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade mit Unsicherheiten und ermitteln Sie daraus die Winkelrichtgröße D^* und das Eigenträgheitsmoment J_0 mit Unsicherheiten.
Auch hier sind die Typ-A-Unsicherheiten von T und r in der Unsicherheit der Geradensteigung enthalten. Welche Unsicherheiten müssen noch berücksichtigt werden? Vergleichen Sie D^* mit dem aus Aufgabe 10. Stimmen beide Werte innerhalb der Unsicherheiten überein? Mit welchem Wert rechnen Sie weiter?

Aufgabe 12: Bestimmung des Trägheitsmoments der Puppe

Berechnen Sie durch Vergleich der Schwingungsdauern mit und ohne Puppe das Trägheitsmoment der Puppe J_{Puppe} mit Unsicherheit in den gemessenen Körperhaltungen. Wie groß ist das Verhältnis der Trägheitsmomente mit angelegten und ausgestreckten Armen?

5.2 Auswertungen der Messungen mit dem Menschen

Für die nun folgenden Aufgaben reicht es, jeweils eine Abschätzung der Unsicherheiten anzugeben, eine explizite Fehlerrechnung ist nicht notwendig.

Aufgabe 13: Statische Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*

Bestimmen Sie die Winkelrichtgröße D^* des Drehtellers analog zu Aufgabe 10.

Aufgabe 14: Berechnung des Eigenträgheitsmoments des Drehtellers

Berechnen Sie aus der Geometrie des Mess-Systems dessen Eigenträgheitsmoment J_0. Nehmen Sie für die Dichte von Aluminium $\rho = 2{,}7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Aufgabe 15: Dynamische Charakterisierung des Mess-Systems

Bestimmen Sie aus der Schwingungszeit und dem Eigenträgheitsmoment J_0 die dynamische Winkelrichtgröße D^*. Vergleichen Sie den Wert mit dem aus Aufgabe 13.

Aufgabe 16: Bestimmung des Trägheitsmoments des Menschen

Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Menschen analog zu Aufgabe 12.

5.3 Theoretische Bestimmung des Trägheitsmoments

Aufgabe 17:

Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Menschen mittels der Einzelträgheitsmomente mit angelegten und ausgestreckten Armen.

Aufgabe 18:

Extrapolieren Sie das Trägheitsmoment der Puppe aus Hüftumfang und Masse auf den Menschen.

Aufgabe 19:

Vergleichen Sie alle rechnerisch ermittelten Trägheitsmomente des Menschen mit dem entsprechenden Messwert (angelegte und ausgestreckte Arme).

6 Fragen

Eine Hängeschaukel ist ein Holzbrett das mittels 2 Seilen an einer Stange befestigt ist und frei schwingen kann. Auf der Schaukel sitze ein Mensch.

1. Welche Energieformen treten während einer Schwingung auf?
2. Wann ist der Drehimpuls maximal, wann ist er Null?
3. Wie wird das Trägheitsmoment beeinflusst wenn der Schaukelnde den Oberkörper absenkt (nach hinten kippt)?
4. Wie verändert sich die Energie des Systems Schaukel/Mensch wenn der Schaukelnde dauerhaft den Oberkörper absenkt?
5. Durch welches periodische Verhalten kann der Schaukelnde die Veränderung des Trägheitsmoments nutzen, um dem System Energie zuzuführen? (Stichwort: parametrische Resonanz)
   Hinweis: Energie die der Schaukelnde in Form von Muskelarbeit aufbringt gilt als dem System zugeführt. Energie die er zurückgewinnt gilt als dem System entzogen. Die chemische Energie bleibt unberücksichtigt.
6. Was bedeutet dieses Verhalten für den maximalen Drehimpuls während der Schaukelbewegung, bzw. für den maximalen Drehwinkel?