Brückenschaltungen (BRU)

Themengebiet: Elektrodynamik und Magnetismus

1 Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, 3. Aufl., Teubner, Stuttgart
- F. Kohlrausch, *Praktische Physik, Band 2*, Teubner, 1985
- W. D. Cooper, *Elektrische Meßtechnik*, 1. Aufl., VCH, Weinheim, 1989

2 Grundlagen

2.1 Ohmscher Widerstand

Der ohmsche Widerstand R eines Leiters ist definiert als der Quotient aus angelegter Spannung U und dem fließenden Strom I, also

$$R = \frac{U}{I} \tag{1}$$

Man könnte daher Widerstände direkt messen, indem man U und I gleichzeitig bestimmt. Dabei muss man aber die Innenwiderstände der Messgeräte und die Leitungswiderstände mitberücksichtigen, und dazu auch kennen. Man benutzt deshalb in der Praxis meist eine Vergleichsmessung von Widerständen, die mit hoher Genauigkeit durchgeführt werden kann, vorausgesetzt, man besitzt einen genauen Widerstands-Standard.

2.2 Komplexe Widerstände

2.2.1 Induktiver Widerstand

Legt man an die Enden eines Leiters eine Gleichspannung an, so fließt in ihm ein Gleichstrom, der nicht davon abhängt, ob der Leiter gestreckt oder zu einer Spule aufgewickelt ist. Anders verhält es sich bei einer Wechselspannung. Im Falle der Spule fließt dann ein geringerer Strom, d.h. der Widerstand der Spule ist für Wechselstrom größer, da durch den Strom selbst in der Spule eine Gegenspannung induziert wird (Lenz'sche Regel). Denken wir uns die Spule aus sehr dickem Draht gewickelt, sodass der ohmsche Gleichstromwiderstand vernachlässigbar klein wird, so besitzt die Spule einen *Wechselstromwiderstand* R_L für den gilt

$$R_\mathrm{L} = \omega L \tag{2}$$

Hierbei ist $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz des Wechselstromes und L die *Selbstinduktivität* (Einheit Henry, $1\ \mathrm{H} = 1\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$). L hängt nur von den Daten der Spule ab (Querschnitt, Länge, Windungszahl und Permeabilität des Spulenkerns).

2.2.2 Kapazitiver Widerstand

Ein Kondensator hat für Gleichstrom praktisch einen unendlich hohen Widerstand. Legt man jedoch eine Wechselspannung an, so fließt ein Strom, d.h. ein Kondensator hat einen endlichen *Wechselstromwiderstand* R_C, für den gilt

$$R_\mathrm{C} = \frac{1}{\omega C}, \tag{3}$$

wobei C die *Kapazität* (Einheit Farad, $1\ \mathrm{F} = 1\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}$) des Kondensators ist.

2.2.3 Mathematische Darstellung

Für eine sinusförmige Wechselspannung gilt

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t + \Psi_\mathrm{U}), \tag{4}$$

wobei U_0 die *Scheitelspannung* und Ψ_U ein Phasenwinkel ist. Analog kann Wechselstrom in der Form

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \Psi_\mathrm{I}) \tag{5}$$

dargestellt werden. Beim ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung in Phase, d.h. $\Psi_\mathrm{U} = \Psi_\mathrm{I}$. Bei einem rein induktiven Widerstand jedoch eilt die Spannung dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ in der Phase voraus, während bei einem rein kapazitiven Widerstand die Spannung dem Strom um $\frac{\pi}{2}$ nacheilt.
Der Leistungsverlust eines Wechselstromwiderstandes ist allgemein durch

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cdot \cos(\Psi_\mathrm{U} - \Psi_\mathrm{I}) \tag{6}$$

gegeben. Im Gegensatz zum ohmschen Widerstand wird in der reinen Induktivität und der reinen Kapazität keine Energie verbraucht, da der Term $\cos(\Psi_\mathrm{U} - \Psi_\mathrm{I})$ gerade verschwindet. R_L und R_C werden deshalb als *Blindwiderstände* bezeichnet. Hat man in einem Wechselstromkreis ohmsche, induktive und kapazitive Widerstände, so muss man zur Berechnung des Gesamtwiderstandes wegen der Phasenverschiebung von Strom und Spannung die einzelnen Widerstände nicht algebraisch, sondern geometrisch addieren.

Zur Verdeutlichung der Verhältnisse kann man das *Zeigerdiagramm* benutzen. Dabei werden Strom und Spannung, bzw. die Widerstände, durch Zeiger dargestellt, deren Längen proportional zu den betragsmäßigen Werten sind, und deren Winkeldifferenz die Phasenunterschiede ausdrücken.

Man orientiert bei Reihenschaltung alle Größen am Stromzeiger I (siehe Abbildung 1a)), da in diesem Fall I in allen Widerständen gleich ist. Nach den obigen Ausführungen zeigt dann die Spannung U_R am ohmschen Widerstand in dieselbe Richtung, während die Spannungszeiger U_L bzw. U_C für Spule und Kondensator um die Winkel $\pm\frac{\pi}{2}$ gedreht sind. Da die Spannungen proportional zu den Widerständen sind, zeichnet man zweckmäßigerweise nur diese und erhält ein Widerstandszeigerdiagramm, wie es Abbildung 1b) zeigt. Sind z.B. ein ohmscher Widerstand R und eine Spule mit der Selbstinduktivität L in Reihe geschaltet, so ergibt sich der Betrag des Gesamtwiderstands Z nach Abbildung 1c) zu

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \tag{7}$$

Die Phasenverschiebung Ψ_L zwischen Strom und Spannung errechnet sich danach aus

$$\tan \Psi_\mathrm{L} = \frac{\omega L}{R} \tag{8}$$

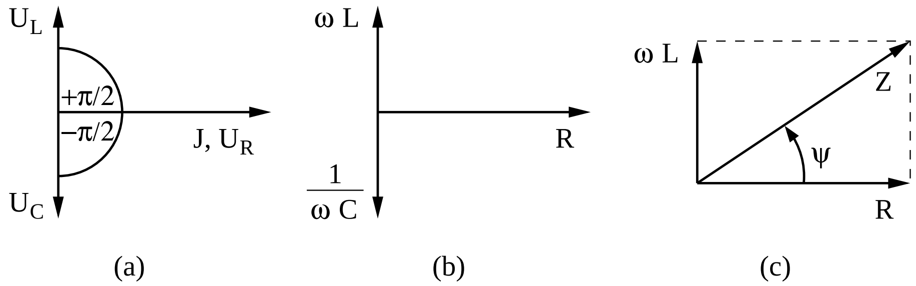

Abbildung 1: a) Spannungs- und b) Widerstandszeigerdiagramm. c) Zeigerdiagramm für den Gesamtwiderstand mit Phasenverschiebung.

In der Praxis ist es einfacher, für einen Wechselstromkreis Strom, Spannung und Widerstand als komplexe Größen anzugeben. Die Widerstände sind dann durch die Ausdrücke

$$Z = R; \qquad Z = j\omega L; \qquad Z = \frac{-j}{\omega C} \tag{9}$$

gegeben, wobei $j = \sqrt{-1}$ die imaginären Einheit ist. Die Zeigerdiagramme ergeben sich aus der Auftragung der elektrischen Größe in der gaußschen Zahlenebene: x-Achse: real, y-Achse: imaginär. Für das obige Beispiel ist dann $Z = R + j\omega L$. Der Betrag komplexer Größen ist die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate von Real- und Imaginärteil (siehe Gleichung (7)).

2.3 Brückenschaltungen

Zur Messung von Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten verwendet man *Brückenschaltungen*. Sie bestehen aus vier im allgemeinen komplexen Widerständen Z_k, die, wie in Abbildung 2 angegeben, miteinander verbunden sind.

An die Punkte a und c wird eine Spannung U (Gleich- oder Wechselspannung) gelegt. Der Strom i_G in der Brückendiagonalen zwischen b und d wird mit einem Messgerät mit Innenwiderstand Z_G gemessen. Er kann aus den Widerständen Z_k mit Hilfe der beiden Kirchhoffschen Regeln berechnet werden.

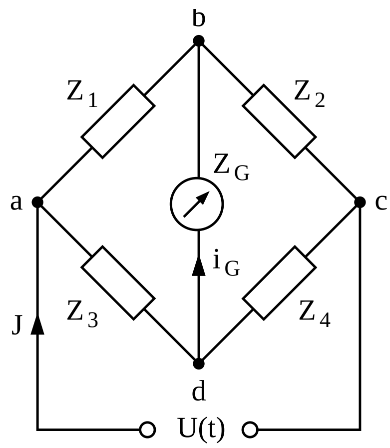

Abbildung 2: Allgemeine Brückenschaltung.

Knotenregel (1. Kirchhoffsche Regel): An jedem Knotenpunkt ist die Summe aller zu- und abfließender Ströme gleich Null. Zu- und abfließende Ströme haben unterschiedliche Vorzeichen.

$$\sum_n i_n = 0 \tag{10}$$

Maschenregel (2. Kirchhoffsche Regel): In einem beliebig aus einem Leiternetz herausgegriffenen, geschlossenen Stromkreis ist die Summe der Produkte aus Widerständen und zugehörigen Strömen gleich der Summe der eingeprägten Spannungen U_m bei Beachtung des Vorzeichens.

$$\sum_{l=1}^{r}(Z_l i_l) = \sum_{m=1}^{s} U_m, \tag{11}$$

wobei r die Anzahl der Widerstände und s die der Spannungsquellen in der Schleife sind.

2.3.1 Wheatstonesche Brücke

Zur Messung ohmscher Widerstände verwendet man die *Wheatstonesche Brückenschaltung*. Bei dieser Schaltung werden nur vier ohmsche Widerstände verwendet, also $Z_i = R_i$. An die Punkte a und c ist eine Gleichspannung U angelegt. Zwischen b und d befindet sich ein Strommessgerät mit Innenwiderstand R_G.

Wendet man die Gleichungen (10) und (11) auf die Schaltung in an, so ergibt sich für den Strom i_G in der Brückendiagonalen

$$i_\mathrm{G} = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)+R_\mathrm{G}(R_1+R_2+R_3+R_4)} \cdot J \tag{12}$$

Man sagt, die Brücke ist abgeglichen, wenn der Spannungsabfall zwischen den Punkten b und d Null wird, d.h. $i_\mathrm{G} = 0$ ist. Nach Gleichung (12) muss dann $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$ sein oder

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{13}$$

Sind also im Falle des Abgleiches ein Widerstand (z.B. R_2), und das Verhältnis zweier anderer Widerstände (R_3 und R_4) bekannt, so lässt sich mit Hilfe von Gleichung (13) der vierte, unbekannte Widerstand R_1 berechnen. Es ist zu beachten, dass mit der einfachen Brücke zwischen a und b der Widerstand R_1 zusammen mit dem Widerstand der Zuleitungen gemessen wird. Spezielle Schaltungen sind zu verwenden, falls der Widerstand R_1 vergleichbar mit dem Zuleitungswiderstand ist. Das gleiche gilt für die übrigen Zweige der Brücke.

2.3.2 Wechselspannungsbrücke

Kapazitäten und Induktivitäten können in einer Wechselspannungsbrücke gemessen werden. Dabei bestehen die komplexen Widerstände (Impedanzen) Z_k aus Parallel- oder Serienschaltungen ohmscher Widerstände R_k, Kapazitäten C_k und Induktivitäten L_k. Die Abgleichbedingung für solche Brückenschaltungen lautet

$$Z_1 \cdot Z_4 = Z_2 \cdot Z_3 \tag{14}$$

Da die Z_k im allgemeinen komplex sind, erhält man für den Realteil und den Imaginärteil von Gleichung (14) jeweils eine Abgleichbedingung.

Als Beispiel ergeben sich für die Schaltung in Abbildung 3 die komplexen Widerstände

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1; \qquad Z_2 = R_2 - \frac{j}{\omega C_2}; \qquad Z_3 = R_3; \qquad Z_4 = R_4 \tag{15}$$

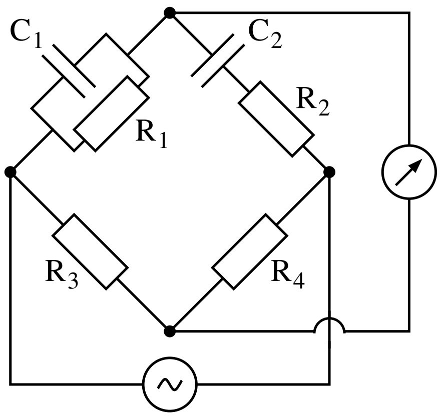

Abbildung 3: Wechselspannungsbrücke mir Kondensatoren

3 Versuchsdurchführung

Alle Schaltungen werden auf einem Steckbrett aufgebaut.

3.1 Messungen mit der Wheatstoneschen Brücke

Bauen Sie für die Messungen von ohmschen Widerständen eine Schaltung nach Abbildung 4 auf.

R_1 ist z.B. der unbekannte Widerstand, R_2 ein Vergleichswiderstand bekannter Größe. Ein Zehngangpotentiometer mit Gesamtwiderstand 1 kΩ bildet die Widerstände R_3 und R_4. Die Gesamtlänge der Potentiometerwendel entspricht 10 Umdrehungen, von denen jede in 100 Skalenteile unterteilt ist.

Das Nullinstrument G ist über den Schleifkontakt mit dem Punkt d auf der Wendel verbunden. Zum Abgleich der Brücke wird das Potentiometer so eingestellt, dass das Nullinstrument keinen Ausschlag mehr zeigt.

Ist die Brücke bei A Umdrehungen abgeglichen, so gilt nach Gleichung (13)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{A}{10-A} \tag{16}$$

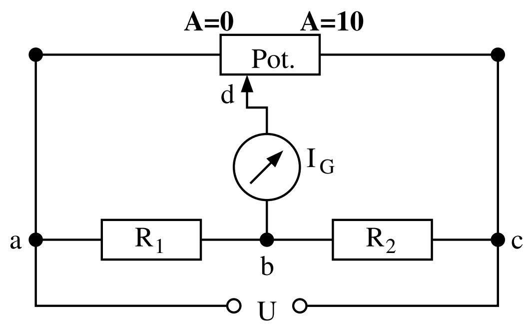

Abbildung 4: Wheatstone'sche Brückenschaltung mit Potentiometer

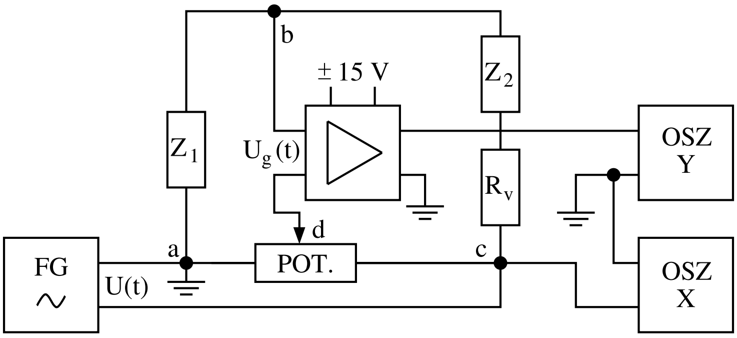

Abbildung 5: Versuchsaufbau Wechselspannungsbrücke

Skizzieren Sie zunächst den Plan der Schaltung, die Sie aufbauen wollen. Schätzen Sie bei jedem Abgleich die Messunsicherheit in Skalenteilen und notieren Sie diese. Überlegen Sie sich, welche weiteren Unsicherheiten zu berücksichtigen sind.

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie mit der Wheatstoneschen Brücke den ohmschen Widerstand eines Potentiometers (Gesamtlänge) für die drei Vergleichswiderstände (10 Ω, 30 Ω und 100 Ω) bei einer Spannung von $U = 1{,}0$ V.

Überprüfen Sie direkt im Praktikum, ob sich in etwa der angegebene Wert von 100 Ω ergibt.

Aufgabe 2:
Messen Sie die ohmschen Widerstände der beiden Spulen (Vergleichswiderstand 10 Ω, Spannung 1 V).

Messen Sie dann auch den Widerstand der Kupferdrahtspule bei den beiden halben Abgriffen A-M und M-E.

Aufgabe 3:
Messen Sie den ohmschen Widerstand einer Glühlampe

1. für die vier Vergleichswiderstände (10 Ω, 30 Ω, 100 Ω und 200 Ω) bei einer Spannung von $U = 1{,}0$ V.
2. mit einem Vergleichswiderstand von 10 Ω bei Spannungen von $U = 2$ V, 3 V, 4 V, 5 V und 6 V.
   Wiederholen Sie diese Messreihe für die Vergleichswiderstände 30 Ω und 200 Ω.

3.2 Messungen mit der Wechselspannungsbrücke

Für Messungen an Induktivitäten und Kapazitäten werden mit dem Versuchsaufbau nach Abbildung 5 durchgeführt.

Als Spannungsversorgung für die Brücke an den Punkten a und c dient ein Funktionsgenerator (FG), an dem eine Sinusspannung mit einer Amplitude $\leq 2{,}0$ V eingestellt wird. Sie liegt zugleich am X-Kanal eines Oszilloskops. Die Amplitude darf nicht zu hoch sein, da sonst der Operatiosverstärker in der Diagonalen g überlastet wird. Die Frequenz soll etwa 1 kHz betragen. Die Spannung zwischen den Punkten b und d wird auf dem Y-Kanal eines Oszilloskops beobachtet. Jedoch kann das Signal nicht direkt auf das Oszilloskop gegeben werden. (Warum?) Es wird eine *Reaktanzbrücke* vorgeschaltet. Auf diese Weise kann der Unterschied im Phasenwinkel der an der Brücke anliegenden Spannung $U(t)$ und der an der Diagonalen $b-d$ auftretenden Spannung $U_\mathrm{g}(t)$ sichtbar gemacht werden. Dabei muss das Oszilloskop auf X-Y-Betrieb und beide Kanäle auf DC-Kopplung geschaltet werden.

Bei richtiger Beschaltung ist eine sogenannte Lissajous-Figur zu sehen, deren Form (Gerade oder Ellipse) von den jeweils zu messenden Widerständen abhängt. Dabei hängt die Neigung der Lissajous-Figur von der Differenz der Spannungen an den beiden Eingängen ab. Bei komplexen Messgrößen ist die Lissajous-Figur eine Ellipse, deren Öffnung vom Phasenwinkel der Spannungen an den beiden Kanälen abhängt.

Zum Abgleichen verändert man abwechselnd das Zehngangpotentiometer (POT) und den zusätzlichen variablen Widerstand R_v. Ist die Brücke abgeglichen, erhält man eine waagrechte Linie auf dem Oszilloskopschirm.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie mit einer Wechselspannungsbrücke die Induktivität der unbekannten Spule L_x.

Die zu messende Spule stellt einen komplexen Widerstand $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ dar. Als Vergleichswiderstand wählt man eine Serienschaltung aus einer bekannten Induktivität L_2 einer Kupferdrahtspule (mit dem ohmschen Widerstand R_s) und einem veränderlichen ohmschen Widerstand R_v. Wenn die Kupferdrahtspule an den Buchsen A und E angeschlossen wird, besitzt sie den auf dem Spulenkörper angegebenen Induktivitätswert.

Der gesamte Widerstand von Z_2 ist also $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$ mit $R_2 = R_\mathrm{s} + R_\mathrm{v}$. Im abgeglichenen Zustand muss nach Gleichung (14) gelten

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1 + j\omega L_1}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{L_1\left(\frac{R_1}{j\omega L_1} + 1\right)}{L_2\left(\frac{R_2}{j\omega L_2} + 1\right)} = \frac{L_1(\cot\Psi_1 + 1)}{L_2(\cot\Psi_2 + 1)} = \frac{A}{10-A} \tag{17}$$

Führen Sie anschließend den Abgleich auch im Y-t-Betrieb des Oszilloskops durch und beobachten Sie dabei Phasenverschiebung und Amplitudenverhalten der beiden Wechselspannungen. Wählen sie dazu zunächst eine Einstellung, bei der die Lissajous-Figur möglichst breit ist.

Beobachten Sie, wie sich die Phasen zwischen beiden Spannungen verändert, wenn sich durch Verändern von R_v das Verhältnis $\frac{Z_1}{Z_2}$ ändert.

Aufgabe 5:
Messen Sie die Induktivität der Kupferdrahtspule zwischen der mittleren und den äußeren Buchsen (halbe Windungszahl, A-M und M-E), wobei die vorher vermessene Spule L_x diesmal als Vergleichsspule dient. Der veränderliche Widerstand R_v muss weiterhin in Reihe mit der Kupferdrahtspule sein.

Aufgabe 6:
Messen Sie mit einer Wechselspannungsbrücke die Kapazität C_x eines Kondensators.

Als Vergleichskapazität wird ein Kondensator mit bekannter Kapazität verwendet, also $Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$.

Bei *idealen* Kondensatoren brauchen keine ohmschen Widerstände berücksichtigt zu werden. Die hier als unbekannte Kondensatoren verwendeten bipolaren Ekektrolytkondensatoren haben jedoch auch einen endlichen ohmschen Widerstand. Im Schaltbild entspricht das einer Parallelschaltung eines Ohmschen Widerstands mit einem idealen Kondensator (R_1 und C_1 in Abbildung 3). Zum Abgleich der Brücke wird zusätzlich der veränderliche Widerstand R_v benötigt. Das Ersatzschaltbild entspricht dann dem in Abbildung 3 gezeigten.

4 Versuchsauswertung

Aufgabe 7:
Berechnen Sie den ohmschen Widerstand des Potentiometers aus den drei durchgeführten Messungen mit den jeweiligen Unsicherheiten. Stimmen die Werte innerhalb der Unsicherheiten überein?
Berechnen Sie den gewichteten Mittelwert und die Gesamtunsicherheit.

Aufgabe 8:
Berechnen Sie für die Spulen den ohmschen Widerstand und die Unsicherheiten.
Vergleichen Sie die Werte der bei halbem Abgriff miteinander und mit der vollen Spule.

Aufgabe 9:
Berrechnen Sie den Widerstand R, den Strom I und die verbrauchte Leistung P der Glühlampe aus Aufgabe 3 Punkt 1.
Bestimmen Sie alle Unsicherheiten und überprüfen Sie ihr Ergebnis. Stimmen die Werte innerhalb der Unsicherheiten überein?

Aufgabe 10:
Bestimmen sie aus den Messreihen der Aufgabe 3 Punkt 2 den Widerstand R, den Strom I und die verbrauchte Leistung P der Glühlampe.

Erstellen Sie aus allen Ihren Messdaten (Aufgabe 3 Punkt 1 *und* 2) zur Glühlampe *ein* I-R-Diagramm in linearer Auftragung und *ein* P-R-Diagramm in doppelt-logarithmischer Auftragung. Diskutieren Sie ihre erhaltenen Kennlinien.

Aufgabe 11:
Ermitteln Sie die Induktivität L der unbekannten Spule und der Vergleichsspule bei halber Windungszahl. Beachten Sie die Unsicherheiten.

Welchen Wert erwarten Sie theoretisch für die Induktivität der halben Spule? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 12:
Geben Sie für die in der Abbildung 3 gezeigten Schaltung die Abgleichbedingungen für Real- und Imaginärteil an. Leiten Sie daraus die Bestimmungsgleichung für die unbekannte Kapazität her.

Aufgabe 13:
Bestimmen Sie aus Ihrer Messung die Kapazität C_x des unbekannten Kondensators unter Verwendung der gerade hergeleiteten Beziehung.